SchemeのBrauer群についてBの2 (SchemeのBrauer群研究会報告集)

小崎, 高太郎

数理解析研究所講究録
53巻 1968年 58-79

SchemeのBrauer群について：Bの2

阪大 理 小崎 高太郎

I　Bの1に続いてschemeのBrauer群の基礎的部分についてGBIIに従いétale cohomologyの観点から調べる。以下考えるschemeは簡単のためすべてnoetherianとし特に断らないかぎり考えるtopologyはétale topologyとする。但しX_{et}を考えるときは base prescheme Xのみをnoetherianと仮定する。

§1　$H^2(X, G_{m,X})$の2、3の性質について

1°　Xをprescheme としX_{et}上のsheaf of invertible rational functions R_X^*をpresheaf $Cat(X_{et}) \ni Y/X \longrightarrow \{Y$上のinvertible rat. func.$\}$（これがpresheafになっている事は容易）にassociateしたsheafとする。更に$\varepsilon : X_{et} \longrightarrow X_{zar}$をcanonical morphismとすると$\varepsilon_*(R_X^*) = R_{X_{zar}}^*$（zariski topologyの意味でのinv. rat. func. のsheaf）である。Xがartinian schemeの場合は$G_{m,X} \cong R_X^*$で、一般にはXのmaximal pointsを$x_1, \ldots, x_n$と

すると $j: S = \coprod \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X, x_i} \to X$ を canonical morphism とすれば $\mathbb{G}_{m,S} \cong R_S^*$ で、$j_*(\mathbb{G}_{m,S}) \cong R_X^*$ である事は容易にわかる。

2° prescheme X に対し irreducible closed subset $\overline{\{x\}}$ が X の associated cycle であるとは、$\mathcal{O}_{X,x}$ の maximal ideal $\mathfrak{m}_x$ が $\mathcal{O}_{X,x}$ に associate していること i.e. $\mathcal{O}_{X,x}$ のある元の annihilator ideal になっていること。$X = \operatorname{Spec} A$ (A: noetherian) ならこれは x に対応する ideal $\mathfrak{p}$ が A の associated prime であることと同値である。更に associated cycles のうち maximal でないものを imbedded associated cycle という。

3° X が imbedded associated cycle をもたないとすると étale sheaves の natural homomorphism $\mathbb{G}_{m,X} \to R_X^*$ は injective

☺ $Y \to X$ が flat なら Y も imbedded associated cycle をもたない (E.G.A. IV (5.7.5) (6.4.2)) ことに注意し更に $Y/_X \in \mathrm{Cat}(X_{et})$ で $Y = \operatorname{Spec} A$ と affine なものが topological generator になる事から canonical map $A^* \to \prod A_{\mathfrak{p}_i}^*$ (但し $\mathfrak{p}_i$ は A の minimal primes) が injective な事をいえばよい。さて $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ を reduced primary decomposition とする。仮定より $\mathfrak{q}_i$ に対応する prime を $\mathfrak{p}_i$ としてよい。故に $\mathfrak{q}_i = \operatorname{Ker}(A \to A_{\mathfrak{p}_i})$ $\therefore$ $A \to \prod A_{\mathfrak{p}_i}$ は injective. //

そこで exact sequence $0 \to \mathbb{G}_{m,X} \to R_X^* \to \mathrm{Div}_X \to 0$

によって X 上の sheaf of Cartier divisors を定義する。ε : $X_{et} \to X_{zar}$ を canonical morphism とすると exact sequence $0 \to \varepsilon_*(\mathbb{G}_{m,X}) \to \varepsilon_*(\mathcal{R}_X^*) \to \varepsilon_*(\mathcal{D}iv_X) \to R^1\varepsilon_*(\mathbb{G}_{m,X})$ を得るが $R^1\varepsilon_*(\mathbb{G}_m) = 0$ $\varepsilon_*(\mathbb{G}_{m,X}) = \mathcal{O}_X^*$ $\varepsilon_*(\mathcal{R}_X^*) = \mathcal{R}_{X_{zar}}^*$ だから $\varepsilon_*(\mathcal{D}iv_X) \cong \mathcal{D}iv_{X_{zar}}$ $(\overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{R}_{X_{zar}}^* / \mathcal{O}_X^*)$

4° Classical な Cartier divisors の sheaf との関係.

scheaf of invertible meromorphic functions $\mathcal{M}_X^*$ を presheaf $Cat(X_{et}) \ni Y/X \rightsquigarrow \{\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ の全商環の可逆元$\}$ (これが presheaf になっている事は容易) に associate した sheaf とする。X が reduced なら canonical isomorphism $\mathcal{M}_X^* \Rightarrow \mathcal{R}_X^*$ が存在する。$\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ が classical な Cartier divisors の sheaf である。c.f. E.G.A IV (20.2.11), (20.2.13) (ii)

5° $X^{(1)} = \{x \in X \mid \dim \mathcal{O}_{X,x} = 1\}$ と置き、函数 $Cat(X_{et}) \rightsquigarrow \{$formal sum $\sum_{x \in X^{(1)}} n_x \overline{\{x\}} \mid n_x$ integer $\{n_x\}$ locally finite$\}$ を考える。Y/X, $Z/X \in Cat(X_{et})$ とすると $Y/X \xrightarrow{f} Z/X$ は étale だから $\dim \mathcal{O}_{Z,z} = 1$ なら ${}^\forall y \in f^{-1}(z)$ に対して $\dim \mathcal{O}_{Y,y} = 1$ そこで $f^*(\overline{\{z\}}) = \sum_{y \in f^{-1}(z)} [k(y) : k(z)] \overline{\{y\}}$ を linear に拡張する事によって上の函数は presheaf とする事ができる。それに associate した sheaf を $\mathcal{Z}_X^1$ と書き sheaf of Weil divisors と呼ぶ。$x \in X$ に対し $\mathbb{Z}_x$ を $x_{et} = \mathrm{Spec}\, k(x)_{et}$ 上に $\mathbb{Z}$ (integers) で定義された constant (abelian) sheaf とし、$i_x : x \to X$ を canonical morphism とすると $Z^1_X \cong \coprod_{x\in X^{(1)}} i_{x*}(Z_x)$ は容易にわかる。

6° $Y=\mathrm{Spec}A$ (A: noetherian) とし $f\in A$ を not zero-divisor とする。 $\mathrm{Spec}(A/(f))$ の maximal points に対応する A の primes を $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ とすると $\dim A_\mathfrak{p}/fA_\mathfrak{p}=0$ で f は $A_\mathfrak{p}$ でも not zero-divisor だから $\dim A_{\mathfrak{p}_i}=1$。 $n_{\mathfrak{p}_i}=\mathrm{length}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/fA_\mathfrak{p})$ として $c'_A(f)=\sum n_{\mathfrak{p}_i}\overline{\{\mathfrak{p}_i\}}$ なる対応を考える。 $f\in A^*$ なら $c'_A(f)=0$ だから $c_A:\{A$ の全商環の可逆元$\}/A^*\longrightarrow\{\mathrm{Spec}A$ の Weil div$\}$ なる写像を得るが $c'_A(fg)=c'_A(f)+c'_A(g)$ よりこれは group homomorphism である。更に $\mathrm{Spec}B\xrightarrow{g}\mathrm{Spec}A$ を étale morphism $A\xrightarrow{\varphi}B$ を対応する ring homomorphism とすると $g^*(c_A(f))=c_B(\varphi(f))$ である (E.G.A. IV (21.10.4)) これらを用いて étale sheaves の morphism $\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*\to Z^1_X$ を得る。故に X が reduced なら morphism $\mathrm{Div}_X\to Z^1_X$ を得るが ① X が normal なら $\mathrm{Div}_X\to Z^1_X$ は injective

② X が regular なら isomorphic

である。証明は normal (regular) が étale morphism で保たれる事、及び E.G.A. IV (21.6.9) による。

7° étale cohomology groups と projective limite との関係に関して次の命題を用いる。

Proposition 0. (S.G.A.A. VII §9)

I を上向きの有向集合且つ $\{X_i\}_{i\in I}$ を quasi-compact, quasiseparated な preschemes の projective system とする。すべての transition morphism $u_{ji}: X_j \to X_i$ は affine とすると、$X = \varprojlim X_i$ は存在する。$i_0 \in I$ に対し G_{i_0} を X_{i_0} 上の locally of finite presentation な commutative group prescheme $i \geq i_0$ に対し $G_i = G_{i_0} \times_{X_{i_0}} X_i$ $G_\infty = G_{i_0} \times_{X_{i_0}} X$ とすると canonical morphism $\varinjlim H^n(X_i, G_i) \longrightarrow H^n(X, G_\infty)$ は任意の n に対して同型で G が non-commutative の場合 $n=1$ に対して同型である。

8° <u>Lemma 1.1</u> $x \in X$ F を $x_{sl} = \mathrm{Spec}\, k(x)_{s}$ 上の abelian sheaf $i_x: x \to X$ を canonical morphism とすると $H^q(X, i_{x*}(F))$ 及び $H^q(X, R_X^*)$ は $q \geq 1$ に対し torsion groups である。

(∵) Leray spectral sequence と discrete space 上の sheaf の cohomology of dim >0 が torsion group なことより。

そこで X が imbedded associated cycle をもたないとすると exact sequence $0 \to G_{m,X} \to R_X^* \to D\tilde{w}_X \to 0$ より exact sequence $H^q(X, R_X^*) \to H^q(X, D\tilde{w}_X) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(X, G_{m,X}) \to H^{q+1}(X, R_X^*)$ を得る。故に Lemma 1.1 を用いて

<u>Corollary 1.2.</u> X が imbedded associated cycle をもたなければ、$\partial: H^q(X, D\tilde{w}_X) \to H^{q+1}(X, G_{m,X})$ の kernel, cokernel は $q \geq 1$ に対して torsion group である。

<u>Proposition 1.3</u>　X が ① regular 又は ② $\dim X \leqq 1$ とすると $q \geqq 2$ に対して $H^q(X, \mathbb{G}_{m,X})$ は torsion group である。

∵ Cor. 1.2 より $H^q(X, D\bar{\omega}_X)$ が $q \geqq 1$ に対し torsion group である事をいえばよい。① X が regular ならばより $D\bar{\omega}_X \cong Z'_X \cong \coprod_{x \in X^{(1)}} i_{x*}(\mathbb{Z}_x)$ 故に $H^q(X, -)$ が inductive limite と commute する事及び Lemma 1.1 より出る。② $\dim X \leqq 1$ ならば $D\bar{\omega}_X$ は skyscraper sheaf で $D\bar{\omega}_X \cong \coprod_{x:\text{closed}} i_{x*}(i_x^*(D\bar{\omega}_X))$ そこで再び Lemma 1.1 による。

Remark. X は noetherian だから canonical map $Br(X) \to H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$ の image は torsion group だから $Br(X) \cong H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$ なるためには $H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$ が torsion group になる事が必要。

9° 以下に於て X の maximal points を $x_1, \ldots, x_n$ としたとき canonical map $Br(X) \to \coprod_i Br(x_i)$ (但し $x_i = \mathrm{Spec}\, k(x_i)$) について調べる。

<u>Lemma 1.4.</u> $H^1(X, R_X^*) = 0$ で canonical map $H^2(X, R_X^*) \longrightarrow \coprod_i H^2(x_i, R_{x_i}^*)$ は injective

∵ $S_i = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X, x_i}$ $j_S : S = \coprod S_i \to X$ を canonical morphism とする。spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(X, R^q j_{S*}(\mathbb{G}_{m,S})) \Rightarrow H^*(S, \mathbb{G}_{m,S})$ に於て S が artinian な事から $R^1 j_{S*}(\mathbb{G}_{m,S}) = 0$ $H^1(S, \mathbb{G}_{m,S}) = 0$ そこで exact sequence $0 \to E_2^{1,0} \to H^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to H^2$ より $E_2^{1,0} = H^1(X, j_{S*}(\mathbb{G}_{m,S})) = H^1(X, R_X^*) = 0$ で $E_2^{2,0} = H^2(X, R_X^*)$

$\to H^2(S, \mathbb{G}_{m,S}) = \coprod H^2(S_i, \mathbb{G}_{m,S_i}) = \coprod H^2(X_i, \mathbb{G}_{m,X_i})$ ($\mathbb{G}_m$ lisse)
は injective

<u>Proposition 1.4</u> X が imbedded associated cycle をもたないとすると exact sequence $0 \to H^1(X, \mathrm{Div}_X) \to H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$
$\to H^2(X, R_X^*) \to H^2(X, \mathrm{Div}_X) \to \cdots$ を得る。更に canonical map
$H^2(X, \mathbb{G}_{m,X}) \to \coprod H^2(X_i, \mathbb{G}_{m,X_i})$ の kernel は $H^1(X, \mathrm{Div}_X)$

㊣ Lemma 1.3 による。 いつ $H^1(X, \mathrm{Div}_X) = 0$ かをしらべる

<u>Lemma 1.5</u> F を torsion free な abelian group M で定められた $\mathrm{Spec}\, k(x)_{et}$ 上の constant sheaf とすると
$H^1(X, i_{x*}(F)) = 0$

㊣ $G = \mathrm{Gal}(k(x)_s / k(x))$ とすると $H^1(X, i_{x*}(F)) \hookrightarrow H^1(x, F)$
$= H^1(G, M) = \varinjlim \mathrm{Hom}(G/H, M) = 0$ (H normal $[G:H] < \infty$)

<u>Proposition 1.6.</u> X が ① regular 又は ② $\dim X \leq 1$ で closed point $x \in X$ に対し $k(x)$ が separably closed なら canonical map $H^2(X, \mathbb{G}_{m,X}) \to \coprod_i H^2(X_i, \mathbb{G}_{m,X_i})$ は injective

㊣ ① X regular なら $\mathrm{Div}_X \cong \coprod_{x \in X^{(1)}} i_{x*}(\mathbb{Z}_x)$ だから Prop 1.4 と
Lemma 1.5 より出る。② の場合 $\mathrm{Div}_X \cong \coprod_{x\,\mathrm{closed}} i_{x*}(i_x^*(\mathrm{Div}_X))$ で
$H^1(X, \mathrm{Div}_X) = \coprod H^1(X, i_{x*}(i_x^*(\mathrm{Div}_X))) \subset \coprod H^1(x, i_x^*(\mathrm{Div}_X)) = 0$

<u>Corollary 1.7</u> 1.6 の条件の下に canonical map
$$\mathrm{Br}(X) \to \coprod_i \mathrm{Br}(X_i) \text{ は injective}$$

この結果は X が regular affine scheme の場合既に

Auslander - Goldman[1]によって得られている。

§2. $Br(X)$ と $H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$ の関係について

$H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$ は一般には torsion group とはならない (Mumford) から $Br(X)$ と $H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$ はかならずしも一致しない。

<u>Lemma 2.1</u> $X = \operatorname{Spec} A$ を local scheme とする。$\xi \in H^2(X, \mathbb{G}_m)$ が $Br(X)$ の元であるためには finite étale surjective morphism $Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$ が存在して $f^*(\xi) = 0$ (is trivial という) が必要であり, finite free A-algebra B が存在して $f: Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$ によって $f^*(\xi) = 0$ になる事が充分である。

∵ 必要性は B の 1 による。充分性を示す。finite surjective morphism $f: Y \to X$ に関する spectral sequence (S.G.A.A. VIII (8.1))
$E_2^{p,q} = H^p(Y/X, \mathcal{H}^q(\mathbb{G}_{m,X})) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{G}_{m,X})$ に於て $\mathcal{H}^1(\mathbb{G}_m)(Y \times_X \cdots \times_X Y)$
$= H^1(Y \times_X \cdots \times_X Y_{et}, \mathbb{G}_m) = H^1(Y \times_X \cdots \times_X Y_{zar}, \mathbb{G}_m) = 0$ (∵ $Y \times_X \cdots \times_X Y$ は semi-local)
故に exact sequence $0 \to H^2(Y/X, \mathbb{G}_m) \to H^2(X, \mathbb{G}_{m,X}) \to H^0(Y/X, \mathcal{H}^2(\mathbb{G}_m))$ を得る。$H^0(Y/X, \mathcal{H}^2(\mathbb{G}_m)) = \operatorname{Ker}(H^2(Y, \mathbb{G}_m) \to H^2(Y \times_X Y, \mathbb{G}_m))$
だから exact sequence $0 \to H^2(Y/X, \mathbb{G}_m) \to H^2(X, \mathbb{G}_{m,X}) \to H^2(Y, \mathbb{G}_m)$ を得る。A_I によれば $Br(Y/X) \cong H^2(Y/X, \mathbb{G}_m)$ だから ξ に対応する $Br(Y/X) \subset Br(X)$ の元をとればよい。

Lemma 2.2. $\dim X = 0$ なら $Br(X) \cong H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$

∵ $X = \operatorname{Spec} A$, A artinian local としてよい。A の剰余体を k とすると $H^2(X, \mathbb{G}_{m,X}) \cong H^2(k, \mathbb{G}_m)$ (∵ $\mathbb{G}_{m,X}$ は lisse)

$\mathrm{Br}(X) \cong \mathrm{Br}(k)$ （Bの1） 且つ $\mathrm{Br}(k) \cong H^2(k, \mathbb{G}_m)$ (classical)

<u>Lemma 2.3</u> A: noetherian local ring of dim 1, maximal ideal $\mathfrak{m}$, $A/\mathfrak{m} = k$ $X = \mathrm{Spec}\,A$ とする。そのとき① k: sep. closed 又は② A: regular (= discrete valuation ring) なら $\mathrm{Br}(X) \cong H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$

(証) ② A: regular の場合 noetherian local ring B と local flat integral ring homomorphism $\varphi: A \to B$ で $\mathfrak{m}A = B$ の maximal ideal $\mathfrak{n}$ で $\bar{\varphi}: A/\mathfrak{m} \hookrightarrow B/\mathfrak{n}$ によって $B/\mathfrak{n}$ は $A/\mathfrak{m}$ の algebraic closure になっているものが存在する。(E.G.A. 0_{III} (10.3.1)) A, $B \otimes k = \bar{k}$ が regular だから B は regular local ring で $\dim B = 1$ (E.G.A. 0_{IV} (17.3.3))。B の商体を K と書く。$\xi \in H^2(A, \mathbb{G}_m) (= H^2(X, \mathbb{G}_{m,X}))$ をとってくると ξ の $H^2(K, \mathbb{G}_m)$ への逆像は K 上の Brauer 群の元だからある finite separable extension $L = K[x]$ が存在してそこで split する。x の K 上の最小多項式 $F(x)$ は B 係数で monic としてよい。そこで $C = B[x]/(F(x))$ とおくと C は domain で B-free. $\dim C = 1$ で C の maximal ideals の剰余体は algebraically closed. $\therefore H^2(C, \mathbb{G}_m) \to H^2(L, \mathbb{G}_m)$ は injective (Prop 1.6) 故に ξ の $H^2(C, \mathbb{G}_m)$ への逆像は零。C は A 上 integral だから C は A-finite subalgebra の inductive limit 故にある A-finite subalgebra D が存在して ξ の $H^2(D, \mathbb{G}_m)$ への逆像が零 (Prop 0)。C は A-flat

故に torsion free. 故に D も torsion free で finitely generated 一方 A は discrete valuation ring。故に D は A-free。そこで Lemma 2.1 を用いればよい。①の場合と殆ど同様。

<u>Proposition 2.4</u> $X=\mathrm{Spec}\,A$ を local henselian scheme とすると $Br(X)\simeq H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$

∵ $\bar{A}$ を A の strict henselization とすると $H^2(\bar{A}, \mathbb{G}_m)=0$ 故にある surjective étale morphism $\mathrm{Spec}\,B\to\mathrm{Spec}\,A$ が存在して ξ の $H^2(B, \mathbb{G}_m)$ への逆像は零 (Prop 0) B の A の maximal ideal 上の ideal を $\mathfrak{m}$ とすると $B_{\mathfrak{m}}$ は A-finite étale (E. G. A. IV (18.5.11)) そこで Lemma 2.1 を用いればよい。

<u>Proposition 2.5</u> X を local scheme l を X の residual characteristic と異なる素数とする。$H^2(X, \mathbb{G}_m)$ の l-torsion elements がすべて $Br(X)$ に属する必要充分条件は任意の $n>0$ に対し任意の $\xi\in H^2(X, \mu_{l^n})$ (或 $\xi\in H^2(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$) が isotrivial な事。

∵ Kummer's exact sequence $0\to\mu_{l^n,X}\to\mathbb{G}_{m,X}\xrightarrow{l^n}\mathbb{G}_{m,X}\to 0$ より exact sequence $0=H^1(X, \mathbb{G}_m)\to H^2(X, \mu_{l^n})\to H^2(X, \mathbb{G}_m)\to H^2(X, \mathbb{G}_m)$ を得るが これと Lemma 2.1 よりでる。更に $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ と $\mu_{l^n,X}$ は finite étale Topology に関し local に同型だから (…) も明らか。

<u>Proposition 2.6</u> (M. Artin)　Xを体k上のlisseなschemeのlocal ringのschemeとすると$l \neq \mathrm{char}(k)$に対し$H^2(X, \mathbb{Z}_{l^n\mathbb{Z}})$の元はすべてisotrivialである。特に$\mathrm{char}\,k=0$なら$\mathrm{Br}(X) \cong H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$

証明は容易でない。

Theorem 2.7　Xをnoetherian preschemeとし

① $\dim X = 1$, $\forall x \in X$ closedに対し$k(x)$はseparably closed

又は② $\dim X \leqq 2$　X regularとすると$\mathrm{Br}(X) \cong H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$

(証)　$\xi \in H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})$として先づ$\mathrm{codim} \geqq 2$のclosed subscheme Yが存在して$\xi | X-Y \in \mathrm{Br}(X-Y)$になる事を示す。$X$のmaximal pointsを$x_1, \ldots, x_n$　$S = \coprod \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X,x_i}$とすると$H^2(S, \mathbb{G}_{m,S}) = \varinjlim_{U \ni x_1, \ldots, x_n \text{な} \mathrm{open}} H^2(U, \mathbb{G}_{m,U})$　$H^1(S, GP(n)_S) = \varinjlim_{U} H^1(U, GP(n)_U)$に注意すればLemma 2.2より$\exists$ open dense subscheme $U \subset X$ $\xi|U \in \mathrm{Br}(U)$。もし$Z = X - U$が$\mathrm{codim}\,1$のirreducible component Z_0を含めば、その generic pointをxとするときLemma 2.3によって$\mathrm{Br}(\mathcal{O}_{X,x}) \cong H^2(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{G}_m)$故に上と同様にして$x$を含むopen subscheme Vが存在して$\xi|V \in \mathrm{Br}(V)$ところが$U \cap V \neq \phi$だから$\xi|U$に対応するconstant rankのAzumaya Algebraを$\mathcal{A}$, $\xi|V$に対応するconstant rankのAzumaya algebraを$\mathcal{B}$とすると$\mathcal{A}|U \cap V \sim \mathcal{B}|U \cap V$。故にlocally free

$\mathcal{O}_{U\cap V}$-Module $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$が存在して $(\mathcal{A}|U\cap V)\otimes \underset{\sim}{End}(\mathcal{E}) \cong (\mathcal{B}|U\cap V)\otimes \underset{\sim}{End}(\mathcal{E}')$

canonical morphism $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X,x} \times_X U \to U\cap V$ を j とすると

$\dim(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X,x} \times_X U) = 0$ だから $j^*(\mathcal{E})$, $(j^*(\mathcal{E}'))$は free である

故に適当に open $x \in W \subset V$ をとって $\mathcal{E}|U\cap W$, $(\mathcal{E}'|U\cap W)$

を freeにできる。それらを free $\mathcal{O}_U$ $(\mathcal{O}_W)$-Module として

U (W) に拡張したものを $\mathcal{F}$, $(\mathcal{F}')$ とする。$\mathcal{A}' = \mathcal{A}\otimes End(\mathcal{F})$

$\mathcal{B}' = \mathcal{B}|W \otimes \underset{\sim}{End}(\mathcal{F}')$ とすると $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$, $\mathcal{B}|W \sim \mathcal{B}'$で

$\mathcal{A}'|U\cap W \cong \mathcal{B}'|U\cap W$ 故に $U\cup W$ 上の Algebra $\mathcal{C}$ で

$\mathcal{C}|U \cong \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}|W \cong \mathcal{B}'$なものが存在する。$\mathcal{C}$が Azumaya Algebra になる事は定義から明らか。noetherian induction

により始めの主張が証明される。Xが regular の場合 $i: U = X - Y$

$\to X$ を canonical inclusion $\mathcal{A}$ を U に対応する Azumaya Algebra とすると $\operatorname{codim} Y \geqq 2$ X regular より $i_*(\mathcal{O}_U) \cong \mathcal{O}_X$

(E.G.A IV 5.10.5) 更に $i_*(\mathcal{A})$ は coherent (同. 5.11.1)

更に $\forall W \subset X$ open に対し $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(i_*(\mathcal{A}), \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)(W)$

$\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_W}(i_*(\mathcal{A})|W, i_*(\mathcal{O}_U)|W), i_*(\mathcal{O}_U)|W)$

$\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{U\cap W}}(\mathcal{A}|U\cap W, \mathcal{O}_{U\cap W}), \mathcal{O}_{U\cap W})$

$\cong \mathcal{A}(W\cap U) \cong i_*(\mathcal{A})(W)$ ($\because \mathcal{A}$: locally free coherent)

故に $i_*(\mathcal{A})$ は reflexive

sublemma A: regular local ring $\dim A \leqq 2$ M: finitely generated reflexive A-module $\Rightarrow$ A-free.

㋡ 仮定より任意の finitely generated A-module M に対し proj. dim $M \leqq 2$。そこで N を finitely generated reflexive A-module とし その dual を N' とする。exact sequence $0 \to Q \to P_1 \to P_0 \to N' \to 0$ (但し P_1, P_0 finite free) を考える。dual をとると $0 \to N \to P_0' \to P_1' \to Q'$ は exact $P_1' \to Q'$ の image を M とおくと $0 \to N \to P_0' \to P_1' \to M \to 0$ は exact 故に上の注意より N は free $_{//}$

故に $i_*(A)$ は locally free. 更に $A \otimes A^\circ \cong \mathcal{H}om_{O_U}(A, A)$ より $i_*(A) \otimes i_*(A)^\circ \simeq \mathcal{H}om_{O_X}(i_*(A), i_*(A))$ を得る。従って $i_*(A)$ は Azumaya Algebra で $i_*(A)|U = A$ の定める cohomology class を引くだから prop 1.6 より A の定める cohomology class を与える。

<u>Corollary 2.5</u> X を regular connected prescheme $\dim X \leqq 2$ η を X の generic point $K = k(\eta)$ とすると $Br(X) \subset Br(K)$ $\forall x \in X$ に対し $Br(O_{X,x}) \subset Br(K)$ だがこのとき

$$Br(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} Br(O_{X,x})$$

㋡ Prop 2.4 の証明と同じ。

II. $H^i(X, G_m)$ 特に $Br(X)$ 又は $H^2(X, G_{m,X})$ がいつ消えるか等について調べる。

§0. X が affine の場合遠藤氏が触れられるのでここでは次の事を注意するにとどめる。

Proposition 0.1 (Tsen) Kを代数的閉体上の一変数代数函数体とするとき $i>0$ に対し $H^i(K, G_m)=0$ 特に $Br(K)=0$

Proposition 0.2. k をseparably closedな標数 p の体 l を p と異なる素数. Kを k 上の一変数代数函数体とすると $H^i(K, G_m)(l)=0$ $(i\geq 1)$ 特に $Br(K)(l)=0$

§1. 体上のalgebraic curveの場合についてしらべる。

Proposition 1.1 Xを代数的閉体 k 上のalgebraic curveとすると $Br(X)=0$

∵ Xはirreducibleとしてよい。そのgeneric pointを η $K=k(\eta)$ を剰余体とするとKは k 上の一変数代数函数体で $Br(X) \hookrightarrow Br(K)=0$

[注意] k を単にseparably closedとしただけでは1.1は一般には成立しない. 例えば $X=\mathrm{Spec}\, k[t]$ としたとき. $Br(X)=0$ $\Leftrightarrow$ k alg. closed

Proposition 1.2 k がseparably closedの場合. $l\neq \mathrm{char}(k)$ に対し $Br(X)(l)=0$

∵ Proposition 0.2 と I prop. 1.6 による。

ところがXが k 上properなら実は $Br(X)=0$ である。そのためにétale topologyとf.p.p.f. topologyの比較定理を用いる(宮西氏の講演参照)

Proposition 1.3. Xをseparably closedな体 k 上proper

な scheme とし k' を k の algebraic closure $X'=X\times_k k'$

$R^1 f_{fl*}(\mathbb{G}_m)=\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$（但し $f: X\to \mathrm{Spec}\,k$ は structure morphism）

とすると次の exact sequence が成り立つ。

$$0\to H^1(k_{fpqc}, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k})\to H^2(X, \mathbb{G}_m)\to H^2(X', \mathbb{G}_m)$$

今の場合 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ は representable だが（J. P. Murre）特に represent する object が k 上 lisse な場合例えば $H^2(X, \mathcal{O}_X)=0$ 又は $H^1(X, \mathcal{O}_X)=0$ の場合（F. G. A. T.D.T. IV Prop 2.10）上の比較定理を用いて $H^i(k_{pqc}, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k})\cong H^i(k_{et}, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k})=0$ (i≥1)

故に $0\to H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})\to H^2(X', \mathbb{G}_{m,X'})$ と injective

Corollary 1.4. X を separably closed な体上 proper な curve とすると $H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})=Br(X)=0$

更にそれ以外で $Br(X)=0$ になる例として

Proposition 1.5. X を有限体上 proper で regular な curve とすると $i\neq 0, 3$ に対し $H^i(X, \mathbb{G}_{m,X})=0$ 特に $Br(X)=0$ c を X の connected component の数とすると $H^3(X, \mathbb{G}_{m,X})\cong(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^c$

(∵田原氏の講演参照)

§2. $\dim X\geq 2$ の場合は今までのような簡単な結果はない。

$\dim X=2$ の場合に関しては後でも触れるが、特に有限体 k 上 proper, lisse な surface に関しては $Br(X)$ は有限群であってその元の個数を Zeta 函数及び Neron-Severi group によって実際に表わす事が予想されていて、特別な場合

(curvesの積の場合とabelian surfaceの場合) $\mathrm{char}(k)=p$ -torsion part を除いてその式が成り立つ事が証明されている (J.Tate.[6,7])。 実際はこの時特別な場合は p-torsion part の部分も少なくとも有限性は証明されているらしい。

特別な場合として projective space の Brauer群を考える。そのために

<u>Lemma 2.1</u> k を任意の体、$k[X_1,\dots,X_n]$ を k 上の多項式環 $k[X_1,\dots,X_n]\to k$ を $X_i\to 0$ なる ring homomorphism とする。そのとき、それから起こる group homomorphism $Br(k[X_1,\dots,X_n])\longrightarrow Br(k)$ の kernel は p-primary である。但し $p=\mathrm{char}(k)$

∵ $n=1$ のときは Auslander - Goldman [ ] による。

n に関する induction による。次の commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} k[X_1,\dots,X_n] & \xrightarrow[\alpha]{X_2,\dots,X_n\to 0} & k[X_1] & \xrightarrow[\beta]{X_1\to 0} & k \\ \gamma\downarrow & & \downarrow & & \\ k(X_1)[X_2,\dots,X_n] & \xrightarrow[\delta]{X_2,\dots,X_n\to 0} & k(X_1) & & \end{array}$$

を考える。$\beta^*\alpha^*(a)=0 \Rightarrow \exists n'\ \alpha^*(a^{p^{n'}})=0 \quad \therefore \delta^*(\gamma^*(a^{p^{n'}}))=0$

$\therefore \exists m\ \gamma^*(a^{p^{n'}})^{p^m}=\gamma^*(a^{p^{n'+m}})=0$ (inductionの仮定) $k[X_1,\dots,X_n]$ は regular domain だから γ^* は injective (I prop 1.6)

$\therefore a^{p^{n'+n}}=0$ //

<u>Proposition 2.2.</u> kを体 $Br(k)=0$ P^nをk上のprojective n-spaceとすると、$\mathrm{char}(k)=p$と異なる任意の素数lに対し
$Br(P^n)(l)$ (l-torsion part) $=0$

∵ P^nのhyperplane Sを一つとってくると $P^n-S\cong \mathrm{Spec}\,k[X_1,\dots,X_n]$
ところがP^nはregularだから再び I. prop1.6をつかえて、
$Br(P^n)\hookrightarrow Br(P^n-S)$ ところが上のlemmaより $Br(P^n-S)(l)=0$
∴ $Br(P^n)(l)=0$.

p-torsion partに関しては Cor 1.4 Prop 1.5 より kが有限体又はsep. closedな体ならば $Br(P^1)=0$

<u>Proposition 2.3</u> (宮西氏の注意) kを有限体又はsep. closedな体. P^2をその上の2次元のprojective spaceとすると $Br(P^2)=0$

∵ 2次元のproper regular algebraic schemeのBrauer群のbirational invariance (証明略) によって $Br(P^2)\cong Br(P^1\times P^1)$
そこで $X=P^1\times_k P^1$ $Y=P^1$ $f: X\to Y$を一つのprojectionとすると、$f_*(G_{m,X})\cong G_{m,Y}$, $R^1f_*(G_{m,X})\simeq \underline{Pic}_{P^1\times P^1/P^1}$
$\simeq \underline{Pic}_{P^1/k}\times P^1\cong \mathbb{Z}_{P^1}$ (constant sheaf). 更にM. Artinの定理 (田原氏の講演参照) より $R^if_*(G_{m,X})=0$ ($i\geq 2$) そこで
spectral sequence $E_2^{p,q}=H^p(Y,R^qf_*(G_{m,X}))\Rightarrow H^*(X,G_{m,X})$
より exact sequence $H^2(Y,f_*(G_{m,X}))\to H^2(X,G_{m,X})\to H^1(Y,\underline{Pic}_{X/Y})$
を得るが $H^2(Y,f_*(G_{m,X}))=H^2(Y,G_{m,Y})=Br(Y)=Br(P^1)=0$

$H^1(Y, \underline{Pic}_{X/Y}) = H^1(Y, \mathbb{Z}_Y)$だが Y は geometrically unibranch 故に $H^1(Y, \mathbb{Z}_Y)=0$ (S.G.A.A. IX. Prop 3.6)
故に $Br(X)=0$ //

III 以下に於て Brauer 群と他の幾何学的整数論的対象との関係について大ざっぱに説明する。

§1 Picard - Igusa の不等式

k を体とし $char(k)=p$ X を k 上の algebraic scheme とする。
$l \neq p$ を素数とするとき Kummer's exact sequence

$$0 \to \mu_{l^n, X} \to G_{m,X} \xrightarrow{l^n\text{倍}} G_{m,X} \to 0$$

から exact sequence $0 \to Pic(X) \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \to H^2(X, \mu_{l^n, X}) \to {}_{l^n}H^2(X, G_{m,X}) \to 0$ を得る。但し任意の abelian group M と任意の整数 m に対して ${}_mM = \{x \in M \mid mx = 0\}$. exact sequences の projective system

$$n > m, \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mu_{l^n, X} & \to & G_{m,X} & \xrightarrow{l^n\text{倍}} & G_{m,X} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle l^{n-m}\text{倍}} & & \downarrow{\scriptstyle l^{n-m}\text{倍}} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \to & \mu_{l^m, X} & \to & G_{m,X} & \to & G_{m,X} & \to & 0 \end{array}$$

より exact sequences の projective system

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Pic(X) \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} & \to & H^2(X, \mu_{l^n, X}) & \to & {}_{l^n}H^2(X, G_{m,X}) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & & & & & \\ 0 & \to & Pic(X) \otimes \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z} & \to & H^2(X, \mu_{l^m, X}) & \to & {}_{l^m}H^2(X, G_{m,X}) & \to & 0 \end{array}$$

を得るが projective system $\{Pic(X) \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}\}$ の transition morphisms は surjective だから limit へ行って exact sequence

$$0 \to \varprojlim Pic(X) \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \to \varprojlim H^2(X, \mu_{l^n, X}) \to \varprojlim {}_{l^n}H^2(X, G_{m,X}) \to 0$$

を得る

一般に $\varprojlim H^i(X, \mu_{\ell^n,X}) = H^i(X, \mathbb{Z}_\ell[1])$, 任意の abelian group M に対し $\varprojlim_{\ell^n} M = T_\ell(M)$ ($\mathbb{Z}_\ell$-modules) と置けば、

$$0 \to \varprojlim \mathrm{Pic}(X)\otimes \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \to H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[1]) \to T_\ell(M) \to 0$$

は exact。今 k を separably closed X を k 上 proper とすると $\mathrm{Pic}(X)$ は有限生成の abelian group $NS(X)$ の ℓ-divisible ($\ell \neq \mathrm{char}(k)$) group $\mathrm{Pic}^\circ(X)$ による拡大である。

$0 \to \mathrm{Pic}^\circ(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to NS(X) \to 0$ exact より

$\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \cong NS(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ で $NS(X)$ は有限生成の $\mathbb{Z}$-module だから $\varprojlim \mathrm{Pic}(X)\otimes \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \cong NS(X)\otimes \mathbb{Z}_\ell$

故に exact sequence

$$0 \to NS(X)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[1]) \to T_\ell(H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})) \to 0$$

を得る。更に今の場合 $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_\ell} H^i(X, \mathbb{Z}_\ell[1]) = B_{i,\ell} < \infty$

そこで $NS(X)$ の rank つまり X の Picard number を ρ とおくと $\mathrm{rank}\, T_\ell(H^2(X, \mathbb{G}_{m,X})) = B_{2,\ell} - \rho$

故に特に不等式 $\rho \leqq B_{2,\ell}$ を得る。

X を更に irreducible で k 上 lisse な surface とすると ℓ-adic cohomology に関する Lefschetz fixed point theorem によって

$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i B_{i,\ell} = \{X\times X$ の diagonal の self-intersection number$\}$

ℓ-adic duality によって $B_{i,\ell} = B_{4-i,\ell}$ $B_{0,\ell} = B_{4,\ell} = 1$

$B_{1,\ell} = B_{3,\ell}$ は Picard scheme の次元の 2 倍であるから

$B_{2,\ell}$ は ℓ に independent. 故に $\mathrm{rank}\, T_\ell(H^2(X, \mathbb{G}_{m,X}))$

も l に independent. $B_{2,l}=B_2$ とおくと Picard-Igusa の不等式 $\rho \leq B_2$ を得る。井草[9]は $B_2 = C_2 + 2(q-1)$ (但し C_2 は $X \times X$ の diagonal の self-intersection number q は Picard variety の次元の2倍として定義したがこれは今の定義と一致している事は上にみた通り。

§2. Zeta function との関係 (J. T. Tate [6,7])

k を標数 p の有限体でその元の個数を q、X を k 上 projective lisse な surface とし $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$ (但し $\bar{k}$ は k の alg. closure) は connected とする。そのとき $l (\neq p)$-adic cohomology groups $H^i(\overline{X}, Q_l) = \varprojlim H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \otimes Q_l$ は有限次元の Q_l-vector space で X の Frobenius endomorphism でひき起される $H^i(\overline{X}, Q_l)$ の endomorphism $\varphi_{i,l}$ の characteristic polynomial を $P_i(X, T) = \det(1 - \varphi_{i,l} T)$ とするとき X の Zeta 函数は

$$\zeta(X, s) = \frac{P_1(X, q^{-s}) P_1(X, q^{1-s})}{(1-q^{-s}) P_2(X, q^{-s})(1-q^{2-s})}$$

となる。更に P_1 従って P_2 は l に無関係な integral coefficients をもつ事がわかっている。

Conjecture (Tate, M. Artin)

Brauer group $Br(X)$ は有限群で

$$P_2(X, q^{-s}) \sim \frac{[Br(X)]|\det(D_i \cdot D_j)|}{q^{d(X)}[NS(X)_{tors}]^2}(1-q^{1-s})^{\rho(X)} \quad (s \to 1)$$

但し
$$\begin{cases} d(X) = \chi(X, \mathcal{O}_X) - 1 + \dim(\mathrm{Picar\,Var}(X)) & (d(X) \geq 0) \\ NS(X) = \{\mathrm{Im}(\mathrm{Pic}(X) \to NS(\bar{X}))\} \\ NS(\bar{X}) = \bar{X} \text{ の divisors の algebraic equivalence classes} \\ \rho(X) = NS(X) \text{ の rank} \\ (D_i)_{1 \leq i \leq \rho} \text{ は } NS(X) \text{ の mod Torsion の base} \\ (D_i \cdot D_j) \text{ は } D_i, D_j \text{ の total intersection number} \end{cases}$$

この conjecture に関し次の事が分っている。

Theorem (Tate [6,7])

X を k 上の2つの curves の積又は abelian surface とすると $Br(X)(\mathrm{non}\,p) = \prod_{\ell \neq p} Br(X)(\ell)$ は有限群で

$R(T) = P_2(X, T)/(1-qT)^{\rho(X)}$ とおくと

$$R(q^{-1}) = \pm p^{\nu} \cdot \frac{[Br(X)(\mathrm{non}\,p)] \det(D_i \cdot D_j)}{[NS(X)_{tors}]^2}$$

Bibliography

[1] M Artin, A Grothendieck. S.G.A.A 1963/64 I.H.E.S

[2] M Auslander, O Goldman : The Brauer group of a commutative ring, Trans A.M.S. 97 (1960) 367–409

[3] A. Grothendieck : Fondements de la géométrie algébrique

[4] " : Le groupe de Brauer (GB) I, II, III.

[5] " Éléments de géométrie algébrique Chap IV Publ. Math. de I.H.E.S

[6] J.T. Tate : On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and geometric analog Séminaire Bourbaki 306

[7] " : Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Invent. Math 2 (1966) 134–144

[8] J. Igusa : Betti and Picard numbers of abstract algebraic surfaces, Proc. Nat. Acad Sc. 46 (1960), 724–726